# Internationales Studienkolleg der Hochschule Kaiserslautern

**Semester:** Sommersemester 2021

**FSP-Teilprüfung:** Mathematik W2

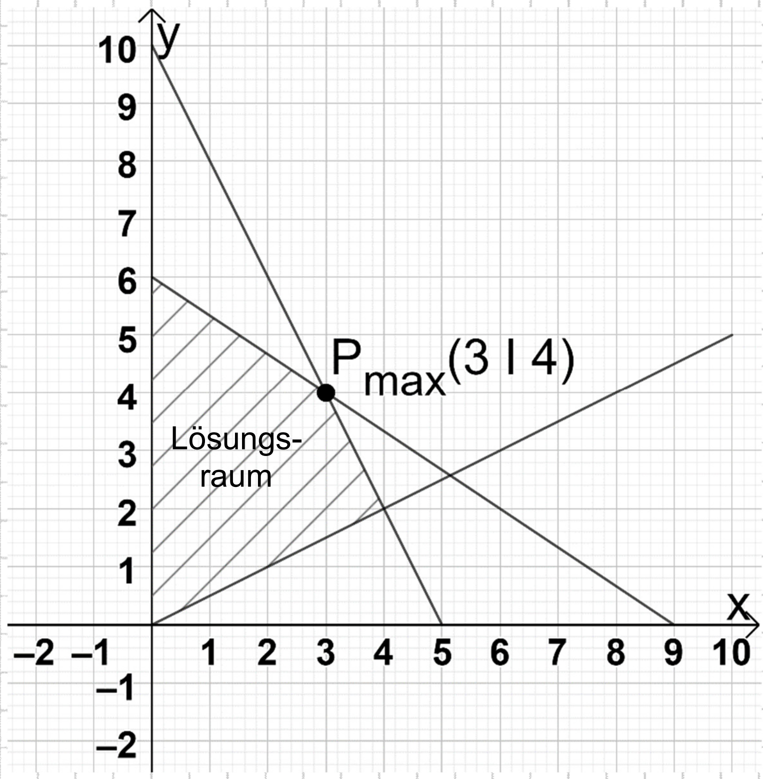
**Datum:** 07.06.2021

**Dauer:** 90 Minuten

**Prüfer:** Dr. Jens Siebel

**Aufgabe 1**

a) Schreiben Sie eine mögliche Zielfunktion $z(x, y) = a \cdot x + b \cdot y + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ auf, die zu dem dargestellten linearen Maximierungsproblem mit der einzigen Lösung $x = 3$, $y = 4$ passt.




*(3 Punkte)*

b) Bestimmen Sie für $f(x, y) = x^2 - x \cdot y + y^2 + x - y \quad \mathbb{D}_f = R^2$ sämtliche Hoch- und Tiefpunkte *(9 Punkte)*.

**Aufgabe 2**

Kreuzen Sie jeweils das Feld mit der einzigen richtigen Antwort an.

- 1 Punkt für jede richtige Antwort,
- 0 Punkte für jede falsche bzw. fehlende Antwort.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a) | Die geränderte Hesse-Matrix $H^*(\lambda_0, x_0, y_0) = \begin{pmatrix} ? & 4 & ? \\ ? & 2 & 3 \\ 5 & ? & 1 \end{pmatrix}$ eines Lagrange-Problems $L(\lambda, x, y) = f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y)$ lautet komplett $H^*(\lambda_0, x_0, y_0) =$ | | | |
| | $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ | $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ | $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ | $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ |
| b) | $f'(x) = \ln(x) \quad \mathbb{D}_f = ]0, \infty[$ ist die erste Ableitung von $f(x) =$ | | | |
| | $\ln(x) \cdot x - x + 3$ ☐ | $\ln(x^2)$ ☐ | $\ln(x^2) \cdot x - x$ ☐ | $\ln(x^2) \cdot x - 1$ ☐ |
| c) | Schwach positive Korrelation von X und Y: Die Regressionsgerade kann maximal wieviel Prozent der Streuung von Y erklären? | | | |
| | 50% ☐ | 64% ☐ | 20% ☐ | 25% ☐ |
| d) | Wenn $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = g \neq 0$ ist mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, dann ist $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} =$ | | | |
| | $-g$ ☐ | $g$ ☐ | $0$ ☐ | $2 \cdot g$ ☐ |
| e) | Bei welcher geordneten Urliste gilt $x_{\text{med}} > x_{\text{mod}}$? | | | |
| | 1, 2, 3, 4 ☐ | 1, 1, 2, 3 ☐ | 1, 1, 1, 2 ☐ | 1, 1, 2, 2 ☐ |
| f) | Eine Funktion ohne Nullstellen in $\mathbb{D}_f$ ist: | | | |
| | $f(x) = x^2 + 1$ ☐ | $f(x) = -2^x + 1$ ☐ | $f(x) = \sqrt{x+1}$ ☐ | $f(x) = \|x\|$ ☐ |
| g) | $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -6 & 15 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Was kann man hier nicht berechnen? | | | |
| | $A \cdot B$ ☐ | $A^T \cdot B$ ☐ | $B \cdot A$ ☐ | $B^T \cdot A$ ☐ |
| h) | Für welche Funktion gilt $\varepsilon(x) = x$ für alle $x > 0$? | | | |
| | $f(x) = e^x$ ☐ | $f(x) = x$ ☐ | $f(x) = \sqrt{x}$ ☐ | $f(x) = x^2$ ☐ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| i) | Für welche Funktion gilt $f'(x) = f'''(x)$? | | | |
| | $f(x) = x \cdot e^{-x}$ ☐ | $f(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$ ☐ | $f(x) = e^x + x$ ☐ | $f(x) = -e^{-x}$ ☐ |
| j) | $A = \begin{pmatrix} 1 & e \\ -1 & e^t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ hat keine Inverse für: | | | |
| | kein $t$ ☐ | $t = 0$ ☐ | $t = 1$ ☐ | alle $t$ ☐ |
| k) | Die Tangente von $f(x) = (x-1)^2 + 1 \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 = 1$ ist: | | | |
| | $y = 0$ ☐ | $y = x$ ☐ | $y = 1$ ☐ | $y = -x$ ☐ |
| l) | $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x}$ | | | |
| | $1$ ☐ | $-\infty$ ☐ | $0$ ☐ | $\infty$ ☐ |

*(12 Punkte)*

**Aufgabe 3**

a) Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem (mit Lösungsweg):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & 83 \\ 2 & 2 & 3 & -19 \\ 9 & 2 & 1 & 38 \end{array}\right)$$ *(6 Punkte)*.

b) Berechnen Sie die Determinante folgender Matrix (mit Lösungsweg):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 16 \\ 6 & 1 & -12 & 1 \end{pmatrix}$$ *(6 Punkte)*.

**Aufgabe 4**

a) Bestimmen Sie die Wendepunkte und die Krümmungsbereiche von $f(x) = e^x - x^2 \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ *(3 Punkte)*.

b) Bestimmen Sie mit dem Newton-Verfahren die Nullstelle $x_2$ für $f(x) = \ln(x) + 2 \cdot x \quad \mathbb{D}_f = ]0, \infty[$ mit dem Startwert $x_0 = 1$ auf vier Nachkommastellen genau *(4 Punkte)*.

c) Bestimmen Sie sämtliche Hoch- und Tiefpunkte von $f(x) = x^3 - 2 \cdot x^2 + x \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$. Geben Sie auch jeweils die Art der Maxima und Minima an *(5 Punkte)*.

**Aufgabe 5**

a) Die Tabelle zeigt, mit wie vielen Punkten Vorsprung der FC Bayern München in den letzten Jahren jeweils Deutscher Fußballmeister wurde[1]:

| **Jahr** | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Punktevorsprung** | 25 | 19 | 10 | 10 | 15 | 19 | 2 | 13 | 13 |

a1) Bestimmen Sie Varianz des Punktevorsprungs (mit Lösungsweg) *(3 Punkte)*.

a2) Zeichnen Sie die Verteilungsfunktion des Punktevorsprungs *(2 Punkte)*.

b) Die Tabelle zeigt für die Jahre 2016 bis 2020 die gerundeten Jahresendstände des deutschen Aktienindex DAX sowie des US-amerikanischen Aktienindex Dow Jones[2]:

| **Jahr** | **2016** | **2017** | **2018** | **2019** | **2020** |
|---|---|---|---|---|---|
| DAX in Punkten | 11.481 | 12.918 | 10.559 | 13.249 | 13.719 |
| Dow Jones in Punkten | 19.763 | 24.719 | 23.327 | 28.538 | 30.606 |

Hinweise:

- durchschnittlicher Jahresendstand des DAX: 12.385,2 Punkte
- durchschnittlicher Jahresendstand des Dow Jones: 25.390,6 Punkte
- Varianz der Jahresendstände des DAX: 1.392.326,56
- Standardabweichung der Jahresendstände des Dow Jones: 3.833,6901
- Rechnen Sie bei den Zwischenschritten auf vier Nachkommastellen genau.

b1) Geben Sie an, welche Art von Korrelation zwischen den Jahresendständen von DAX und Dow Jones in diesen Jahren besteht (mit Lösungsweg). Interpretieren Sie Ihr Ergebnis *(5 Punkte)*.

b2) Bestimmen Sie die Regressionsgerade *(2 Punkte)*.

---

[1] Quelle: www.weltfussball.de (27.05.2021)

[2] Quellen: https://www.finanzen.net/index/dax/hochtief und https://www.finanzen.net/index/dow_jones/hochtief (30.04.2021)